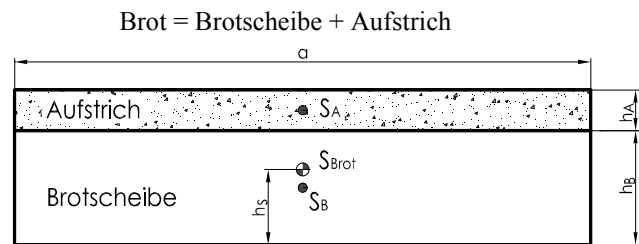


Das Frühstückspöblem

Warum fällt das Butterbrot immer auf die Butterseite?

Tischhöhe: $H = 75\text{cm}$
 Brotscheibe: $a = 10\text{cm}$
 $b = 8\text{cm}$ (Breite unnötig)
 $h_B = 1\text{cm}$
 $m_B = 20\text{g} = 0,02\text{kg}$
 Aufstrich: $h_A = 0,2\text{cm}$
 $m_A = 25\text{g} = 0,025\text{kg}$
 homogen über die Brotscheibe verteilt
 Überhang: $c = 0,2\text{cm}$



1) Fallzeit:

$$t_{Fall} = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 75\text{cm}}{981 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}}} = 0,391\text{s}$$

2) Schwerpunkt des Brotes:

$$h_S = \frac{m_B \cdot \frac{h_B}{2} + m_A \cdot (\frac{h_A}{2} + h_B)}{m_B + m_A} = \frac{0,02\text{kg} \cdot 0,5\text{cm} + 0,025\text{kg} \cdot (0,1\text{cm} + 1\text{cm})}{0,02\text{kg} + 0,025\text{kg}} = 0,833\text{cm}$$

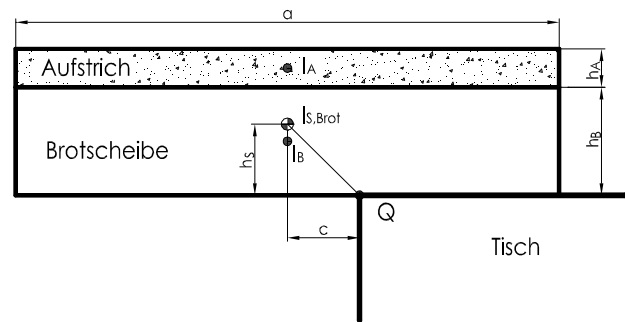
3) Trägheitsmomente:

Trägheitsmoment der Brotscheibe:

$$I_B = \frac{m_B}{12} \cdot (h_B^2 + a^2) = \frac{0,02\text{kg}}{12} \cdot (1\text{cm}^2 + 100\text{cm}^2) = 0,1683\text{kg cm}^2$$

Trägheitsmoment des Aufstriches:

$$I_A = \frac{m_A}{12} \cdot (h_A^2 + a^2) = \frac{0,025\text{kg}}{12} \cdot (0,04\text{cm}^2 + 100\text{cm}^2) = 0,2084\text{kg cm}^2$$



Trägheitsmoment des Brotes (Brotscheibe + Aufstrich) bezüglich seiner Schwerachse S_{Brot} :

$$I_{S,Brot} = I_B + m_B \cdot (h_S - \frac{h_B}{2})^2 + I_A + m_A \cdot (h_B + \frac{h_A}{2} - h_S)^2 = 0,1683\text{kg cm}^2 + 0,02\text{kg} \cdot (0,833\text{cm} - 0,5\text{cm})^2 + 0,2084\text{kg cm}^2 + 0,025\text{kg} \cdot (1\text{cm} + 0,1\text{cm} - 0,833\text{cm})^2 = 0,1683\text{kg cm}^2 + 0,002\text{kg cm}^2 + 0,2084\text{kg cm}^2 + 0,002\text{kg cm}^2 = 0,3808\text{kg cm}^2$$

Das Brot wird nun soweit verschoben, dass die Schwerachse um $c = 0,2\text{cm}$ vor der Tischkante Q liegt.

Trägheitsmoment des Brotes bezüglich der Tischkante Q:

$$I_Q = I_{S,Brot} + (m_B + m_A) \cdot (h_S^2 + c^2) = 0,3808\text{kg cm}^2 + 0,045\text{kg} \cdot ((0,833\text{cm})^2 + (0,2\text{cm})^2) = 0,4138\text{kg cm}^2$$

4) Das Brot kippt um die Kante Q mit der Winkelgeschwindigkeit ω_Q

$$\omega_Q = \sqrt{\frac{(m_B + m_A) \cdot g \cdot \sqrt{h_S^2 + c^2}}{I_Q}} = \sqrt{\frac{0,045 \text{ kg} \cdot 981 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \sqrt{(0,833 \text{ cm})^2 + (0,2 \text{ cm})^2}}{0,4138 \text{ kg cm}^2}} = 9,56 \frac{1}{\text{s}}$$

(vgl. Pendel mit kleiner Amplitude)

5) Winkelgeschwindigkeit $\omega_{S, \text{Brot}}$ des Brotes während des freien Falles:

Nach dem Kippen (kleine Verdrehung) verlässt das Brot die Kante Q und dreht sich im freien Fall mit derselben Rotationsenergie um die eigene Schwerachse (S_{Brot}) weiter (Kippenergie = Rotationsenergie):

$$E_{\text{Kipp}} = E_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \cdot I_Q \cdot \omega_Q^2 = \frac{1}{2} \cdot I_{S, \text{Brot}} \cdot \omega_{S, \text{Brot}}^2 \quad \text{Luftwiderstand wird vernachlässigt}$$

Winkelgeschwindigkeit während des freien Falles (Energieerhaltung):

$$\omega_{S, \text{Brot}} = \omega_Q \cdot \sqrt{\frac{I_Q}{I_{S, \text{Brot}}}} = 9,56 \frac{1}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{0,4138 \text{ kg cm}^2}{0,3808 \text{ kg cm}^2}} = 9,97 \frac{1}{\text{s}}$$

6) Periodendauer der Rotation des Brotes während des freien Falles:

$$T_{S, \text{Brot}} = \frac{2\pi}{\omega_{S, \text{Brot}}} = \frac{2\pi}{9,97 \frac{1}{\text{s}}} = 0,63 \text{ s}$$

d.h.: in 0,63s würde sich das Brot einmal um die eigene Schwerachse drehen.

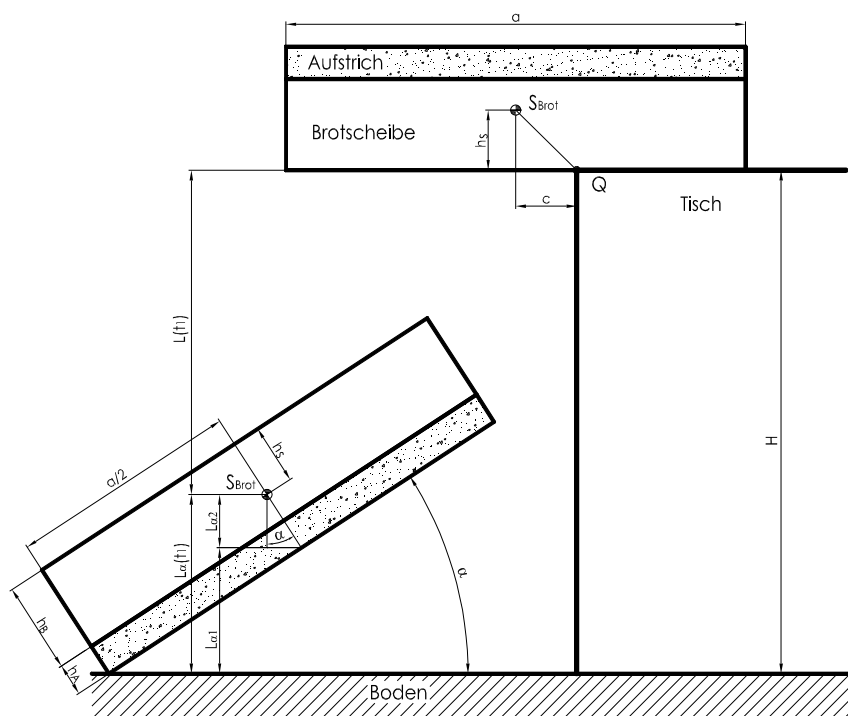
7) Anzahl der Umdrehungen nach t_{Fall} :

$$U(t_{\text{Fall}}) = \frac{t_{\text{Fall}}}{T_{S, \text{Brot}}} = \frac{0,391 \text{ s}}{0,63 \text{ s}} = 0,62 \text{ Umdrehungen}$$

8) Theoretischer Aufprallwinkel:

$$\alpha_{\text{theor}} \approx U(t_{\text{Fall}}) \cdot 360^\circ - 180^\circ = 223^\circ - 180^\circ = 43^\circ$$

Winkel der Brotoberfläche bezüglich der Horizontalen zur Fallzeit t_{Fall} , gemessen nach einer halben Umdrehung:



9) Reeller Zeitpunkt des Aufpralles der Brotkante:

Nach der theoretischen Fallzeit ist der Schwerpunkt des Brotes bereits auf Bodenhöhe. Das Brot trifft allerdings schräg zum Boden auf. Somit ist die effektive Fallzeit kürzer.

⇒ Annahme: effektive Fallzeit $t_1 = 0,382s$ (entspricht 97,7% von t_{Fall})

10) Fallweg $L_S(t_1)$ des Schwerpunktes nach t_1 :

$$L_S(t_1) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = 0,5 \cdot 981 \frac{cm}{s^2} \cdot (0,382s)^2 = 71,6cm$$

11) Anzahl der Umdrehungen nach t_1 :

$$U(t_1) = \frac{t_1}{T_{S,Brot}} = \frac{0,382s}{0,63s} = 0,606 \text{ Umdrehungen}$$

12) Rotationswinkel nach t_1 :

Winkel der Brotoberfläche bezüglich der Horizontalen zur Fallzeit t_1 , gemessen nach einer halben Umdrehung:

$$\Rightarrow \alpha \approx U(t_1) \cdot 360^\circ - 180^\circ = 218,3^\circ - 180^\circ = 38,3^\circ$$

13) Aufprallende Kante liegt um $L_\alpha(t_1)$ unterhalb des Schwerpunktes:

$$L_\alpha(t_1) = L_{\alpha 1} + L_{\alpha 2} = \frac{a}{2} \cdot \sin \alpha + (h_B + h_A - h_S) \cdot \cos \alpha = \frac{10cm}{2} \cdot \sin 38,3^\circ + (1cm + 0,2cm - 0,833cm) \cdot \cos 38,3^\circ = 3,38cm$$

14) Probe: Gesamter Fallweg $L(t_1)$ ist gleich Fallhöhe H :

$$L(t_1) = L_S(t_1) + L_\alpha(t_1) = 71,6cm + 3,38cm = 74,9cm \approx H = 75,0cm$$

Bei einer Abweichung von $> 3\%$ (oder 2cm) muss t_1 neu bestimmt werden.

Ergebnis:

Das bestrichene Brot fällt (mit einem Winkel von 38°) mit der Butterseite nach **unten** auf den Boden.

Voraussetzung hierfür ist eine Tischhöhe von ca. 75cm, ein saches Verschieben des Brotes über die Tischkante und ein Toastbrot mit viel Marmelade.

Weitere Berechnungen:

Beispiel	Veränderungen	Aufprallwinkel α ¹⁾	Brot landet mit der Butterseite nach:
1	Ausgangssituation, wie oben berechnet	38,2°	unten
2	a = 9 cm (kleineres Brot)	60,8°	unten
3	a = 8 cm (kleineres Brot)	90,5°	oben
4	c = 1 cm (stärkerer Stoß)	85,9°	oben ²⁾
5	a = 8 cm, c = 1 cm	160,2°	oben
6	H = 70 cm (niedrigerer Tisch)	31,2°	unten
7	H = 70 cm, a = 8 cm	80,8°	oben ²⁾
8	H = 70 cm, c = 1 cm	76,3°	unten ²⁾
9	H = 70 cm, a = 8 cm, c = 1 cm	146,3°	oben
10	$h_A = 0, m_A = 0$ (kein Aufstrich)	-2,8°	unten
11	H = 310cm, $h_A = 0, m_A = 0$ (kein Aufstrich)	180,9°	oben
12	H = 107 cm	80,5°	unten ²⁾
13	H = 108 cm	81,7°	oben ²⁾

Tab. 19.6: Alle nicht genannten Parameter bleiben unverändert.

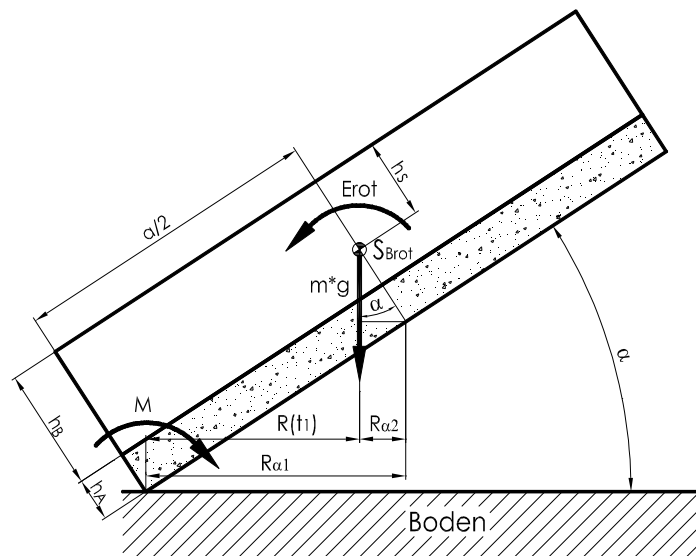
¹⁾ Aufprallwinkel gemessen nach einer halben Umdrehung.

²⁾ Vergleich zwischen Rotationsenergie und Kippdrehmoment beim Aufprall notwendig.

⇒ Das Fallproblem hängt also nicht von Murphy's Law ab, sondern von den Anfangsbedingungen wie z. B. Tischhöhe (H), Brot (a, h_B , m_B) und Stoßparameter (c).

Für Aufprallwinkel von $70^\circ < \alpha < 85^\circ$ ist ein Nachrechnen erforderlich.

Ist die Rotationsenergie größer als das Kippdrehmoment um die auftreffende Brotkante beim Aufprall, so kippt das Brot in Drehrichtung weiter und fällt mit der Butterseite nach oben auf den Boden (siehe Beispiele 12 und 13 der Tab. 19.6).



Beispiel 8: $H = 70\text{cm}$
 $c = 1\text{cm}$
 $I_{S,\text{Brot}} = 0,3808\text{ kg cm}^2$
 $\omega_{S,\text{Brot}} = 12,285\text{ 1/s}$
 $t_1 = 0,364\text{ s}$
 $\alpha = 76,3^\circ$

15) Horizontaler Abstand zwischen Aufprallkante und Schwerachse:

$$R(t_1) = R_{\alpha 1} + R_{\alpha 2} = \frac{a}{2} \cdot \cos \alpha - (h_B + h_A - h_S) \cdot \sin \alpha = \frac{10\text{cm}}{2} \cdot \cos 76,3^\circ - (1\text{cm} + 0,2\text{cm} - 0,833\text{cm}) \cdot \sin 76,3^\circ = 0,83\text{cm}$$

16) Kippdrehmoment um die Aufprallkante:

$$M = (m_B + m_A) \cdot g \cdot R(t_1) = 0,045\text{kg} \cdot 981 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot 0,83\text{cm} = 36,5 \frac{\text{kg} \cdot \text{cm}^2}{\text{s}^2}$$

17) Rotationsenergie (konstant während des freien Falles):

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot I_{S,\text{Brot}} \cdot \omega_{S,\text{Brot}}^2 = 0,5 \cdot 0,3808\text{kg cm}^2 \cdot (12,285 \frac{1}{\text{s}})^2 = 28,7 \frac{\text{kg} \cdot \text{cm}^2}{\text{s}^2}$$

18) Abfrage:

$M > E_{\text{Rot}}$: Das Brot fällt auf die berechnete Seite: Das bestrichene Brot trifft mit der Butterseite nach **unten** auf den Boden auf.

$M < E_{\text{Rot}}$: Das Brot kippt nach dem Auftreffen um die Brotkante in Richtung der Rotation auf die andere Seite. Das bestrichene Brot trifft mit der Butterseite nach **oben** auf den Boden auf.

Ergebnis:

Das bestrichene Brot (Beispiel 8: $M > E_{\text{Rot}}$) fällt (mit einem Winkel von 76°) mit der Butterseite nach **unten** auf den Boden.